

Качение неоднородного шара по сфере без скольжения и верчения*

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

Институт компьютерных исследований
Удмуртский государственный университет
Россия, Ижевск, 426034, ул. Университетская, 1
E-mail: borisov@ics.org.ru, mamaev@ics.org.ru

Получено 17 ноября 2006 г.

В работе рассмотрена задача о качении динамически несимметричного уравновешенного шара (шара Чаплыгина) по поверхности сферы. Предполагается, что при качении равна нулю скорость точки контакта и проекция угловой скорости шара на нормаль к сфере. Эта модель качения без проскальзывания отличается от классической и в некотором приближении реализуется, если поверхность шара является резиновой, а сфера абсолютно шероховатой. Койлером и Ойлерсом для этой задачи недавно была указана мера и гамильтонова структура. Используя эту структуру мы строим изоморфизм этой задачи с задачей о движении точки по сфере в некотором потенциальном поле и указываем интегрируемые случаи.

Ключевые слова: Шар Чаплыгина, модель качения, гамильтонова структура

A. V. Borisov, I. S. Mamaev

Rolling of a heterogeneous ball over a sphere without sliding and spinning

Consider the problem of rolling a dynamically asymmetric balanced ball (the Chaplygin ball) over a sphere. Suppose that the contact point has zero velocity and the projection of the angular velocity to the normal vector of the sphere equals zero. This model of rolling differs from the classical one. It can be realized, in some approximation, if the ball is rubber coated and the sphere is absolutely rough. Recently, Koiller and Ehlers pointed out the measure and the Hamiltonian structure for this problem. Using this structure we construct an isomorphism between this problem and the problem of the motion of a point on a sphere in some potential field. The integrable cases are found.

Keywords: Chaplygin ball, rolling model, Hamiltonian structure

Mathematical Subject Classifications: 37N15

*Работа выполнена в рамках программы ведущих научных школ (НШ-1312.2006.1) при поддержке РФФИ (04-05-64367, 05-01-01058), CRDF (RU-M1-2583-MO-04) и INTAS (04-80-7297).

1. Реализация связи. Уравнения движения

Рассмотрим движение динамически несимметричного уравновешенного шара (шара Чаплыгина) по поверхности неподвижной сферы. Мы предполагаем, что при движении мгновенная скорость точки контакта и проекция угловой скорости шара на нормаль к сфере равна нулю. Эта модель движения отличается от классической неголономной модели качения при проскальзывании, в которой предполагается, что равна нулю только скорость точки контакта. Она введена в работе [11] и более подробно рассмотрена в [1, 12].

Остановимся сначала на классической неголономной модели. Она рассматривалась С. А. Чаплыгиным [8] для случая качения шара по плоскости, А. В. Борисовым, Ю. Н. Фёдоровым [3] для качения по неподвижной сфере. Чаплыгин в [8] указал необходимые для интегрируемости по теории последнего множителя инвариантную меру и дополнительный первый интеграл, а также явно проинтегрировал систему, используя сфероконические координаты. Более подробные ссылки и достаточно полное исследование движения шара Чаплыгина содержится в работе [13]. В работе [8] указано соотношение между радиусами сферы и шара, при котором задача также является интегрируемой. Эта система до сих пор не проинтегрирована в квадратурах, а ее динамическое поведение не изучено. Иерархия динамического поведения в неголономных системах с качением твердого тела без скольжения по плоскости и сфере обсуждается в [9].

Рассмотрим теперь новую модель качения, которая физически может быть интегрирована как движение шара при наложении дополнительных связей, запрещающих его скольжение и верчение. Составим уравнения движения шара с учетом описанных выше связей, которые, как легко показать, не являются интегрируемыми. Воспользуемся уравнениями неголономной механики в квазикоординатах, которые содержат неопределенные множители. Впервые эта форма уравнений, видимо, была отмечена Г. К. Сусловым в своем знаменитом курсе [6]. Они обычно называются уравнениями Эйлера — Пуанкаре — Суслова. В качестве квазикоординат и квазискоростей примем соответственно единичный вектор нормали к поверхности \mathbf{n} и векторы \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, являющиеся скоростью центра масс и угловой скоростью. Все векторы предполагаются спроецированными на главную центральную систему координат, жестко связанную с шаром.

Кинетическая энергия свободной системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}), \quad (1.1)$$

где m — масса шара, $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — центральный тензор инерции. Две указанные выше неголономные связи имеют вид

$$\mathbf{f} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = 0, \quad (1.2)$$

$$g = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{r} = -b\mathbf{n}$ — радиус-вектор из центра шара в точку контакта, b — радиус шара. Отметим, что связь (1.2), выражающая отсутствие проскальзывания, имеет векторный вид $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Уравнения Эйлера — Пуанкаре — Суслова имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} N_i + \mathbf{F}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \sum \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{\omega}} N_i + \lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{M}_F \end{aligned} \quad (1.4)$$

или в явном виде

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{N}, \\ \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times \mathbf{N} + \lambda \mathbf{n} + \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$, λ являются неопределенными множителями (реакциями) связей, \mathbf{F} , \mathbf{M}_F представляют собой внешнюю силу и ее момент относительно центра масс. Исключение \mathbf{N} приводит к системе, которая отделяется от уравнений для $\dot{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + m\mathbf{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) \times \boldsymbol{\omega} - m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}) + \lambda\mathbf{n} + \mathbf{M}_Q, \quad (1.6)$$

где $\mathbf{M}_Q = \mathbf{M} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ — момент внешних сил относительно точки контакта, $\mathbf{r} = -b\mathbf{n}$.

Чтобы замкнуть систему, составим кинематическое уравнение, определяющее эволюцию \mathbf{n} . Прежде всего заметим, что условие равенства скоростей точки контакта (точнее, совпадающей с ней точки) на подвижной и неподвижной поверхностях имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{y} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}, \quad (1.7)$$

где \mathbf{y} — вектор из центра неподвижной сферы в точку контакта (рис. 1). Он равен $\mathbf{y} = a\mathbf{n}$, где a — радиус неподвижной сферы. Из (1.7) легко получим

$$\dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \quad k = \frac{a}{a+b}. \quad (1.8)$$

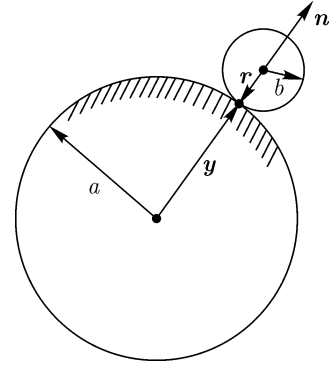


Рис. 1

Для внутреннего обката сферы шаром (рис. 2) $a < 0$, $b > 0$, $|a| > b$ и $k = \frac{|a|}{|a|-b} > 0$, для внешнего обката шара сферой (рис.

3) $a > 0$, $b < 0$, $|a| < b$, $k = -\frac{a}{|b|-a} < 0$. Для качения шара по

плоскости $a = \infty$, $k = 1$, для качения тела, имеющего плоский участок, по сфере $b = \infty$, $k = 0$.

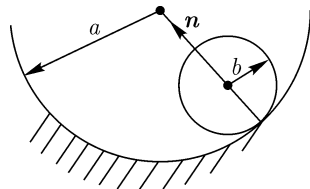


Рис. 2

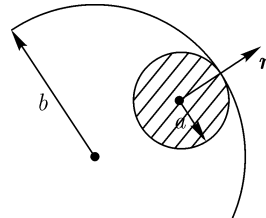


Рис. 3

Продифференцировав связь (1.3) с учетом (1.8), находим $(\dot{\boldsymbol{\omega}}, \mathbf{n}) = 0$, следовательно с учетом связи получаем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + m\mathbf{r} \times (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) &= \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + mb^2\dot{\boldsymbol{\omega}}, \\ \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + mb^2\boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \lambda\mathbf{n} + \mathbf{M}_Q, \quad \dot{\mathbf{n}} = k\mathbf{n} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{J} &= \mathbf{I} + mb^2\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \|\delta_{ij}\|, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$\lambda = -\frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) + (\mathbf{M}_Q, \mathbf{J}\mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n})}.$$

Прежде чем перейти к анализу системы (1.9), отметим, что дополнительная связь $g = (\mathbf{n}, \boldsymbol{\omega}) = 0$ имеет ясный физический смысл. В этом случае реализуется такая модель качения, при которой момент трения верчения тела относительно точки контакта очень велик (например, при вязком трении, коэффициент диссипации, связанный с верчением, следует стремиться к бесконечности). Одной из возможных реализаций такого качения является движение резинового шара по шероховатой поверхности (такая реализация предложена в [11]). В этом случае контакт происходит (вследствие упругости резины) не в одной точке, а на целой площадке, что приводит к большому моменту трения верчения. Другая, более классическая, реализация связей (1.2), (1.3) рассмотрена нами в [2]. Следует однако понимать, что применимость той или иной модели для описания реального движения устанавливается лишь экспериментально и все они носят лишь приближенный характер. Более точные модели используют различные законы трения, но к сожалению, они мало поддаются теоретическому анализу.

Заметим также, что одна из моделей, отличная от классического неголономного качения без проскальзывания, была предложена в [5]. В этой работе рассматривается качение круглого диска с острым краем по горизонтальному льду, при котором предполагается, что на систему наложена неголономная связь: скорость точки касания диска параллельна его горизонтальному диаметру. Эта связь и модель качения диска отличается от классической (Аппель, Чаплыгин, Кортвег), а вопрос об ее применимости решается экспериментально.

2. Интегрируемые случаи

В дальнейшем мы предполагаем, что внешние силы отсутствуют, $\mathbf{M}_Q = 0$. В этом случае система (1.9) обладает инвариантной мерой

$$(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{\frac{1}{2k}} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n}. \quad (2.1)$$

Заметим, что мера (2.1) сохраняется для случая, когда \mathbf{M}_Q зависит только от \mathbf{n} и не зависит от $\boldsymbol{\omega}$. Мера (2.1) была найдена в работе [1]. Уравнения (1.9) обладают также интегралами энергии и геометрическим:

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}), \quad (\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1.$$

Связь $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) = 0$ также можно рассматривать как дополнительный частный интеграл. Для полной интегрируемости по методу последнего множителя (теореме Эйлера — Якоби) необходимо иметь еще один дополнительный интеграл F . Он может быть найден в двух случаях.

1. $k = 1$ ($a = \infty$) — качение шара по горизонтальной плоскости, $F = (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n})$. Как видно из уравнений (1.9) получающаяся система эквивалентна системе Веселовой [4] (это показано нами в [2]) и может быть проинтегрирована с применением сфероконических координат.

2. $k = -1$ ($b = -2a$) — обкат неподвижного шара внутренней поверхностью динамически несимметричной сферы. Дополнительный интеграл

$$F = \frac{(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}^2 + \det \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})}{(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})}. \quad (2.2)$$

Этот интеграл был найден нами при помощи установления аналогии между системой (1.9) и некоторой гамильтоновой системой, описывающей движение материальной точки по двумерной сфере. Изложим эту аналогию более подробно.

3. Гамильтонова структура и алгебраизация

Введем на сфере $|\mathbf{n}| = 1$ сфероконические координаты (ξ, η) . Они являются корнями уравнения

$$f(z) = \frac{n_1^2}{J_1 - z} + \frac{n_2^2}{J_2 - z} + \frac{n_3^2}{J_3 - z} = \frac{(z - \xi)(z - \eta)}{A(z)}, \quad (3.1)$$

где $A(z) = (J_1 - z)(J_2 - z)(J_3 - z)$. Можно показать, что $0 < J_1 < \xi < J_2 < \eta < J_3$. Из (1.2) легко находим

$$n_1^2 = \frac{(J_1 - \xi)(J_1 - \eta)}{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)}, \quad n_2^2 = \frac{(J_2 - \xi)(J_2 - \eta)}{(J_2 - J_1)(J_2 - J_3)}, \quad n_3^2 = \frac{(J_3 - \xi)(J_3 - \eta)}{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)}. \quad (3.2)$$

Из уравнения связи легко найти выражение $\boldsymbol{\omega}$ через \mathbf{n} , $\dot{\mathbf{n}}$: $\boldsymbol{\omega} = k^{-1} \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n}$. Используя формулы (3.2), можно найти угловую скорость $\boldsymbol{\omega}$ в зависимости от $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, ξ , η . Кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega})$ также может быть выражена через $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, ξ , η :

$$T = \frac{\xi - \eta}{8k^2} \left(-\frac{\eta \dot{\xi}^2}{A(\xi)} + \frac{\xi \dot{\eta}^2}{A(\eta)} \right). \quad (3.3)$$

Можно показать (следуя С. А. Чаплыгину [7]), что уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial T}{\partial \xi} &= \dot{\eta} S, & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta} &= -\dot{\xi} S, \\ S &= \frac{2k-1}{8k^3} (\xi - \eta) \left(\frac{\dot{\xi}}{A(\xi)} + \frac{\dot{\eta}}{A(\eta)} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вместо скоростей $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ введем обобщенные импульсы $P_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}$, $P_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}}$. В новых переменных инвариантная мера имеет вид $(\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n})^{-1+1/k} dP_\xi dP_\eta d\xi d\eta$. Введем обозначения

$$\rho^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1} \mathbf{n}) = \frac{\xi \eta}{\det \mathbf{J}}, \quad N = \left(\frac{\xi \eta}{\det \mathbf{J}} \right)^{-1+\frac{1}{2k}}.$$

Сделаем замену времени $N dt = d\tau$, а дифференцирование по τ обозначим штрихом. Тогда $\dot{\xi} = N\xi'$, $\dot{\eta} = N\eta'$, $p_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = N \frac{\partial T}{\partial \xi'}$, $p_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = N \frac{\partial T}{\partial \eta'}$. В новом времени уравнения движения являются каноническими

$$\xi' = \frac{\partial T}{\partial p_\xi}, \quad \eta' = \frac{\partial T}{\partial p_\eta}, \quad p'_\xi = -\frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad p'_\eta = -\frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad (3.5)$$

т. е. N является приводящим множителем (по Чаплыгину). Более подробно с методом приводящего множителя можно ознакомиться по работам [2, 7]. Системы в форме (3.4) называются системами Чаплыгина. Таким образом, мы показали, что в новом времени система является гамильтоновой (для $k = 1$ это было показано нами с использованием углов Эйлера в [2]). Такие системы называются конформно-гамильтоновыми. С помощью несколько иной техники конформная гамильтоновость систем (1.9), (3.4) была впервые обнаружена в [1, 12]. При $k = \frac{1}{2}$ ($a = b$) система (1.9), (3.4) является обычной гамильтоновой системой.

Координаты ξ, η являются локальными. Для того чтобы установить конкретный вид изоморфизма систем (1.9), (3.4) с задачей о движении точки на сфере, воспользуемся новой алгебраической и избыточной системой переменных. Обозначим

$$\tilde{N} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{J}}}{k} \frac{N}{\rho^2} = \frac{\sqrt{\det \mathbf{J}}}{k} (n, J^{-1}n)^{\frac{1}{2k}}.$$

Введем трехмерные векторы

$$\mathbf{M} = \tilde{N} \mathbf{J}^{1/2} \omega, \quad \gamma = \frac{1}{\rho} \mathbf{J}^{-1/2} n. \quad (3.6)$$

Очевидно, что

$$(\gamma, \gamma) = 1, \quad (\mathbf{M}, \gamma) = \frac{\tilde{N}}{\rho} (\omega, n) = 0. \quad (3.7)$$

Используя выражения ω, n через ξ, η, p_ξ, p_η , легко вычислить скобки Пуассона между \mathbf{M} и γ :

$$\{M_i, M_j\} = -\varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = -\varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad (3.8)$$

а также выражение для гамильтониана

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = T = \frac{1}{2} \tilde{N}^{-2} \mathbf{M}^2 &= \frac{1}{2} \frac{k^2}{\det \mathbf{J}} (\gamma, \mathbf{J} \gamma)^{1/k} \mathbf{M}^2 = \\ &= \frac{2k^2}{\xi - \eta} \left(\frac{\xi \eta}{\det \mathbf{J}} \right)^{(2k-1)/k} \left(\frac{A(\xi)}{\eta} p_\xi^2 - \frac{A(\eta)}{\xi} p_\eta^2 \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Скобка (3.8) является скобкой Ли–Пуассона (ко)алгебры $e(3)$. Функции $F_1 = (\mathbf{M}, \gamma)$, $F_2 = (\gamma, \gamma)$ являются ее функциями Казимира.

4. Траекторный изоморфизм

Гамильтониан (3.9) представляет собой произведение двух функций, зависящих соответственно от \mathbf{M} и γ : $\mathcal{H} = G(\gamma)F(\mathbf{M})$. Уравнения движения можно представить в форме

$$\dot{\mathbf{M}} = G \left(\mathbf{M} \times \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}} - FG \gamma \times \frac{\partial G^{-1}}{\partial \gamma} \right), \quad \dot{\gamma} = G \gamma \times \frac{\partial F}{\partial \mathbf{M}}. \quad (4.1)$$

Выполним замену времени $G(\gamma)dt = ds$ и зафиксируем уровень интеграла $FG = h$. На этом уровне получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{ds} &= \mathbf{M} \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial \mathbf{M}} + \gamma \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \gamma \times \frac{\partial \widetilde{\mathcal{H}}}{\partial s}, \\ \widetilde{\mathcal{H}} &= F(\mathbf{M}) - \frac{h}{G(\gamma)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом, на фиксированном уровне интеграла энергии $\mathcal{H} = h$ система (4.1) траекторно-эквивалентна системе (4.2) при $\widetilde{\mathcal{H}} = 0$. Описанная нами процедура в небесной механике носит название регуляризации и восходит к Болину и Леви-Чивите.

Для гамильтониана (3.9) имеем

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{M}^2 - h(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\boldsymbol{\gamma})^{-1/k}, \quad h = \text{const.} \quad (4.3)$$

Хорошо известно, что гамильтониан (4.3) описывает движение материальной точки по поверхности сферы (как раз при условии $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = 0$) в потенциальном поле сил с потенциалом $V = h(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{J}\boldsymbol{\gamma})^{-1/k}$. Интегрируемые потенциалы соответствуют $k = 1$ (система Брадена [10]) и $k = -1$ (система Неймана). В остальных случаях гамильтониан (4.3), видимо, неинтегрируем. По крайней мере можно показать, что дополнительного интеграла, квадратичного по \mathbf{M} , не существует. Однако остается возможность существования дополнительного интеграла более высокой степени по импульсам.

5. Распределение переменных для случая $k = -1$

Указанный изоморфизм позволяет построить разделяющие переменные для случая $k = -1$. Определим сфероконические координаты u и v как корни функции

$$g(z) = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i^2}{J_i(J_i - z)} = \frac{(z - u)(z - v)}{(\det \mathbf{J})A(z)},$$

где $A(z) = \prod_i (J_i - z)$ и $0 < J_1 < u < J_2 < v < J_3$. Поэтому

$$n_1^2 = \rho^2 \frac{J_1(J_1 - u)(J_1 - v)}{(J_1 - J_2)(J_1 - J_3)},$$

$$n_2^2 = \rho^2 \frac{J_2(J_2 - u)(J_2 - v)}{(J_2 - J_1)(J_2 - J_3)},$$

$$n_3^2 = \rho^2 \frac{J_3(J_3 - u)(J_3 - v)}{(J_3 - J_1)(J_3 - J_2)},$$

где $\rho^2 = (\mathbf{n}, \mathbf{J}^{-1}\mathbf{n}) = \left(\sum_i J_i - u - v \right)^{-1}$. Для кинетической энергии (3.3) мы имеем

$$T = \frac{\det \mathbf{J}}{8\rho^4(u - v) \left(\frac{\dot{u}^2}{A(u)} - \frac{\dot{v}^2}{A(v)} \right)}.$$

Из (3.4) мы явно найдем приводящий множитель

$$N = \left(\sum_1 J_1 - u - v \right)^{3/2},$$

и для переменных $u, v, p_u = N \frac{\partial T}{\partial \dot{u}}, p_v = N \frac{\partial T}{\partial \dot{v}}$ после замены времени $N dt = d\tau$ получим канонические уравнения с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{2}{\det \mathbf{J} \left(\sum_i J_i - u - v \right) (u - v)} (A(u)p_u^2 - A(v)p_v^2).$$

Таким образом, переменные u и v являются разделяющими.

Авторы благодарят Дж. Койлера и К. Ойлерса за постановку задачи и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Ehlers K., Koiller J. *Rubber rolling: geometry and dynamics of 2-3-5 distributions*. // In Proceedings IUTAM symposium 2006 on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence, at the Steklov Institute, Moscow, to appear.
- [2] Borisov A. V., Mamaev I. S. *Isomorphism and Hamilton representation of some nonholonomic systems*. // Siberian Mathematical Journal, 48:11, 2007, to appear. См. также arXiv: nlin.SI/0509036 v1 (Sept. 21, 2005).
- [3] Борисов А. В., Фёдоров Ю. Н. *О двух видоизмененных интегрируемых задачах динамики*. // Вестн. МГУ, сер. мат. мех., 1995, № 6, с. 102–105.
- [4] Веселова Л. Е. *Новые случаи интегрируемости уравнений движения твердого тела при наличии неголономной связи*. // Сб. Геометрия, диф. уравнения и механика, МГУ, 1986, с. 64–68.
- [5] Козлов В. В., Колесников Н. Н. *О теоремах динамики*. // Прикл. Мат. Мех., 1978, т. 42, вып. 1, с. 28–33.
- [6] Сулов Г. К. Теоретическая механика. // М., Гостехиздат, М.-Л., 1946. 655 с.
- [7] Чаплыгин С. А. *К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе*. // Полн. собр. соч., М.-Л., 1948, т. 1, с. 15–25.
- [8] Чаплыгин С. А. *О катании шара по горизонтальной плоскости*. // Собр. соч., т. 1, М.-Л.: ОГИЗ, 1948, с. 76–101.
- [9] Borisov A. V., Mamaev I. S. *The rolling of rigid body on a plane and sphere. Hierarchy of dynamic*. // Regular and Chaotic Dynamics, 2002, v. 7, № 1, p. 177–200.
- [10] Braden H. W. *A completely integrable mechanical system*. // Lett. in Math. Phys., 1982, v. 6, p. 449–452.
- [11] Ehlers K., Koiller J., Montgomery R., Rios P. *Nonholonomic systems via moving frames: certain equivalence and Chaplygin Hamiltonization*. In *The Breadth of Symplectic and Poisson Geometry* (Eds. J. E. Marsden, T. S. Ratiu), Festschrift in honor of Alain Weinstein, Ser. Progress in Mathematics, v. 232, 2005, Birkhäuser.
- [12] Koiller J., Ehlers K. *Rubber rolling over a sphere*. // Submitted to Regul. Chaotic Dyn. См. также arXiv: math.SG/0612036 (Dec. 1, 2006).
- [13] Kilin A. A. *The Dynamics of Chaplygin Ball: the Qualitative and Computer Analysis*. // Regul. Chaotic Dyn. 2001. V. 6, № 3, 291–306.